Aufgabe ①

a) $d(x,y) \geq 0$ und $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$ positive Definitheit

$d(x,y) = d(y,x)$ symmetrie

$d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y)$ Dreiecksungleichung

(1) $d_a(x,y)=0 \Rightarrow |x-y|=0 \Rightarrow x=y$ ✓

$d_a(x,y) = |x-y| = |y-x| = d_a(y,x)$ ✓

$d_a(x,z)+d_a(z,y) = |z-x|+|y-z| \geq |y-x| = d_a(x,y)$ ✓

$\cdot z$

$x\cdot$ $\cdot y$

(2) $d_b(x,y)=0 \Rightarrow x=y$ ✓

$d_b(x,y) = d_b(y,x)$ ✓

$d_b(x,z)+d_b(z,y) \underset{\downarrow}{=} 1+1=2 \geq d(x,y)=1$

x,z,y undersidlich $\Rightarrow x \neq y \neq z$

~~$x \neq z \neq y$~~ $z \neq$

(3) $d_c(x,y)=0 \Rightarrow |x-y|<1 \not\Rightarrow x=y$ Also nicht positive definit ✗

b) $\boxed{A_a \Rightarrow A_b \quad ✗}$

A_a: $\forall \varepsilon>0, \exists n \in \mathbb{N}, \forall k \geq n \quad d_a(a_k,a)<\varepsilon \Rightarrow |a_k-a|<\varepsilon$

~~Da bei d_b ε wird immer ≥ 1 oder~~

Für eine Folge dass $a_k \neq a$ $\Rightarrow d_b(a_k,a)$ ~~ist immer~~ wird nie kleiner als $\underline{1}$ $\Rightarrow$ ε kann nicht beliebig ausgewählt werden

~~$A_a \Rightarrow A_c$~~ Aber andersom $\boxed{A_b \Rightarrow A_a \text{ ist gültig.} ✓}$

Da wenn $\forall \varepsilon>0, \exists n \in \mathbb{N}, \forall k \geq n \quad d_b(a_k,a)<\varepsilon \Rightarrow d_b(a_k,a)=0 \Rightarrow a_k=a \Rightarrow |a_k-a|<\varepsilon$

$\boxed{A_a \Rightarrow A_c \quad \checkmark}$

$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, \forall k \geq n: \quad d_x(a_k, a) < \varepsilon \Rightarrow |a_k - a| < \varepsilon < 1$

$$\Rightarrow \underbrace{d_c(a_k, a)}_{0} < \varepsilon$$

$\boxed{A_c \Rightarrow A_a \quad \times}$ wen : ... $\underbrace{d_c(a_k, a)}_{\text{muss } 0 \text{ sein}} < \varepsilon$

$$|a_k - a| < 1$$

$\boxed{A_b \Rightarrow A_c \quad \checkmark}$

.... $d_b(a_k, a) < \varepsilon \Rightarrow a_k = a \Rightarrow d_c(a_k, a) = 0 < \varepsilon$

$\boxed{A_c \Rightarrow A_b \times}$ ..... $d_c(a_k, a) < \varepsilon \Rightarrow |a_k - a| < 1$

~~von hier lea~~

2. als stetitg part diffbar!)

b) z.z. g ist auf ganze $\mathbb{R}^2$ stetig

g stetig in $(x,y) \neq (0,0)$ klar. Da produkt, Quotient stetiger funktionen

g stetig in $(0,0)$: sei $\varepsilon > 0$, sei $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$$|f(x,y) - f(0,0)| = \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \right|$$

Da $|xy| \leq (\max\{|x|,|y|\})^2 \leq x^2 + y^2 \Rightarrow |f(x,y) - f(0,0)| \leq \left| \frac{\sqrt{x^2+y^2} \cdot \sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| = \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|$

$\Rightarrow$ Mit $\delta = \varepsilon$ gilt $\|(x,y)\| < \delta \Rightarrow \|f(x,y) - f(0,0)\| < \varepsilon$ $\Rightarrow$ f ist stetig in $(0,0)$

(Next page)

Scanned by CamScanner

ii) z.z. ① g $\hat{=}$ ist überall part. diffbar

② part. Abl. von g sind nicht stetig in (0,0)

① $(x,y) \neq (0,0)$. $\partial_x g(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{xyx}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{y^3}{\|(x,y)\|^3}$

$$\partial_y g(x,y) = \frac{x^3}{\|(x,y)\|^3}$$

$(x,y) = (0,0)$: $\partial_x g(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} [f(h,0) - f(0,0)] = 0$

$$\partial_y g(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} [f(0,h) - f(0,0)] = 0$$

② Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge mit $x_n = (x_n, 0)$, $x_n \xrightarrow{n \to \infty} 0$

$(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folge mit $y_n = (0, y_n)$; $y_n = (0, y_n)$, $y_n \xrightarrow{n \to \infty} 0$

$$\lim_{n \to \infty} \partial_x g(y_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{y_n^3}{y_n^3} = 1 \neq 0 = \overbrace{\partial_x g(\underbrace{\lim_{n \to \infty} y_n}_{(0,0)})}^{0}$$

$$\lim_{n \to \infty} \partial_y g(x_n) = \lim_{n \to \infty} \frac{x_n^3}{x_n^3} = 1 \neq 0 = \partial_y g(\underbrace{\lim_{n \to \infty} x_n}_{=(0,0)})$$

~~totale diffbarkeit ist~~ (part diffbarkeit schwächere Bedingung als totale diffbarkeit)

iii) z.z. g ist in (0,0) nicht total diffbar

Betrachte Richtungsableitung in Richtung (1,1) :

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} [f(h,h) - f(0,0)] = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \frac{h^2}{\sqrt{2h^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{h \to 0} \frac{h}{\|h\|} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{für } h \downarrow 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \text{für } h \uparrow 0 \end{cases}$$

Richtungsabl. in Richtung (1,1) existiert bei (0,0) nicht

$\Rightarrow$ Richtungsabl. in Richtung (1,1) existiert bei (0,0) nicht

$\Rightarrow$ f ist in (0,0) nicht total diffbar

Aufgabe 5

Mit Geometrische Reihe vergleichen $\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ für $|q|<1$

$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+2)} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z+2} = \frac{A(z+2)+B(z+1)}{(z+1)(z+2)}$ $\Rightarrow A=1,\ B=-1$

$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2}$

1) $\frac{1}{z+1} = \frac{1}{1-(-z)} \overset{\text{geometrische Reihe}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$, $|z|<1$

$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-(-\frac{z}{2})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}(\frac{-1}{2})^n z^n$, $|z|<2$

$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n \underbrace{- \frac{1}{2}(-\frac{1}{2})^n}_{+(\frac{-1}{2})^{n+1}}\right) z^n$, $|z|<1$ d.h. $z \in K_{(0,1)}(0)$

2) $\frac{1}{z+2}$ hatten wir bereits in $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}(\frac{-1}{2})^n z^n$ entwickelt mit konvergenz für $|z|<2$

$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-(\frac{-1}{z})} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{z})^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{-(n+1)} = \sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{n+1} z^n$ mit $\frac{1}{|z|}<1 \Rightarrow |z|>1$

$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)^{n+1} z^n + \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{-1}{2})^{n+1} z^n$, $1<|z|<2$ d.h. $z \in K_{(1,2)}(0)$

3)

$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{(z-1)+2} = \frac{1}{z-1}\frac{1}{1-\frac{-2}{z-1}} = \frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{-2}{z-1})^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n (z-1)^{-(n+1)}$

$= \sum_{n=-\infty}^{-1}(-2)^{-(n+1)}(z-1)^n$, $|z-1|>2$

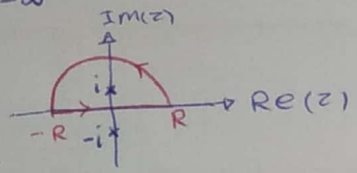
$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{(z-1)+3} = \frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1-\frac{-3}{z-1}} \overset{\text{wie eben}}{=} \sum_{n=-\infty}^{-1}(-3)^{-(n+1)}(z-1)^n$, $|z-1|>3$

$\Rightarrow f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1}\left[(\frac{-1}{2})^{n+1} - (\frac{-1}{3})^{n+1}\right](z-1)^n$, $|z-1|>3$ d.h. für $z \in K_{(3,\infty)}(1)$

Aufgabe 4:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+1}\,dx = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2}\,dx$$

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{1+z^2}$$



$$2\pi i \operatorname{Res}(f, i) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2}\,dx + \int_{\frac{1}{2}\partial K_R(0)} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz$$

für $\operatorname{Im}(z) > 0 \rightarrow |e^{iz}| < 1$

$$\Downarrow$$

$$\left|\frac{e^{iz}}{1+z^2}\right| \leq \frac{1}{R^2-1}$$

$$\left| \int_{\frac{1}{2}\partial K_R(0)} \frac{e^{iz}}{1+z^2}\,dz \right| \leq \frac{2\pi R}{R^2-1} \xrightarrow{\lim R \to \infty} 0$$

$$\Rightarrow 2\pi i \frac{1}{(1-1)!} \lim_{z \to i} \left[(z-i) f(z)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2}\,dx$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{1+x^2}\,dx = 2\pi i \lim_{z \to i} \left[\cancel{(z-i)} \frac{e^{iz}}{(z+i)\cancel{(z-i)}}\right] = 2\pi i \lim_{z \to i} \frac{e^{iz}}{(z+i)} = 2\pi i \frac{e^{-1}}{2i} = \frac{\pi}{e}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+1}\,dx = \operatorname{Im}\left(\frac{\pi}{e}\right) = 0$$

Scanned by CamScanner